Razi University

Logic Circuits Design

Computer Engineering Department of Razi University

Dr. Abdolhossein Fathi

بارم درس و مرجع آن

Razi University

- مرجع درس:
  - کتاب طراحی دیجیتال (مدار منطقی)، نوشته: موریس مانو ترجمه: دکتر قدرت سپید نام
  - کتاب مدارات دیجیتال، نوشته: نیلسون و همکاران.
- بارم درس:
  - تمرینات ٪۱۰
  - امتحان میان ترم ٪۲۰
  - امتحان پایان ترم ٪۷۰

سرفصلها

- آشنايي با سيستم اعداد
- آشنايي با جبر بول و توابع منطقی
- ساده سازی توابع منطقی
- طراحی مدارهای ترکیبی
  - طراحی جمع کننده / تفریق کننده / مقایسه کننده
  - طراحی انکدر / دیکدر
  - طراحی مالتی پلکسر / دی مالتی پلکسر
- پیاده سازی توابع با ابزارهای آماده و قابل برنامه ریزی
- طراحی مدارهای ترتیبی
  - طراحی عناصر حافظه
  - طراحی انواع شمارنده
  - طراحی مدارات تشخیص دهنده دنباله ها

Razi University

آشنایی با سیستم اعداد

Razi University

سیستم اعداد رومی

- انسان از دیرباز با اختراع سیستم های عددی سعی در بکارگیری آنها در مسائل محاسباتی و شمارشی خود حتی در محاسبات ساده روزمره داشته است.
- یکی از قدیمی ترین سیستم های عددی سیستم شمارش اعداد رومی می باشد.
- در این سیستم هر سمبل نشان دهنده یک مقدار مشخص است و این مقدار بسته به ترتیب سمبلها به مقدار کل اضافه یا از آن کم می شود:
  - سمبلها: I=1, V=5, X=10, L=50, C=100, D=500, M=1000, …
  - شیوه محاسبه: اگر یک سمبل با ارزش کم قبل از یک سمبل با ارزش بیشتر قرار بگیرد، سمبل کوچکتر از سمبل بزرگتر کم خواهد شد. در غیراینصورت سمبلها با هم جمع خواهد شد.
  - مثال: IX=9, XI=11, CXX=120, XC=90, IXC=91, XIC=89

سیستم های عددی وزن دار

- سیستم های عددی امروز از یک روش پیچیده تر برای نمایش اعداد استفاده می کنند که به سیستم وزن دار مشهور است.
- در این سیستم ابتدا یک مبنا برای محاسبات و نمایش اعداد انتخاب می شود. سپس هر سمبل یا رقم بسته به موقعیت آن در کل دنباله ارقام (نسبت به یک نقطه ثابت بنام نقطه ممیز یا اعشار) یک وزن (مبنا به توان موقعیت) خواهد داشت، مقدار نهایی هر عدد برابر حاصلضرب رقم در وزن آن خواهد بود. جمع تمام این مقادیر عدد کلی را مشخص خواهد کرد.

$$(N)_r = (d_n d_{n-1} \dots d_1 d_0 . d_{-1} d_{-2} \dots d_{-k})_r = \sum_{i=-k}^{n} d_i \times r^i$$

عدد در مبنای r　　موقیت ارقام　　نقطه ممیز　　عدد در مبنای ده

سیستم اعداد ده دهی (Decimal)

- در سیستم فعلی ما مبنا برابر ده (r=10) بوده لذا ارقام آن ۰ تا ۹ می باشد.
- اگرچه بخاطر آشنایی و عادت کردن ما به این شیوه نمایش پیچیدگی آن از نظر پنهان می ماند.
- وزنها توانی از ده می باشد (یکان (10^0)، دهگان (10^1)، صدگان (10^2) و ... همچنین، یک دهم (10^{-1})، یکصدم (10^{-2}) و ...)

$$\ldots \quad 10^4 \quad 10^3 \quad 10^2 \quad 10^1 \quad 10^0$$

$$1 \quad 7 \quad 3$$

$$= 1 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 3 \times 10^0$$

$$= 100 + 70 + 3$$

$$= 173$$

سیستم اعداد دودویی (Binary)

- در این سیستم مبنا برابر دو (r=2) بوده لذا ارقام آن ۰ و ۱ می باشد.
- باتوجه به اینکه این سیستم دارای دو سمبل (۰ و ۱) برای نمایش اعداد می باشد این سیستم نمایش بسیار مناسب سیستم های کامپیوتری می باشد.
- وزنها توانی از دو می باشد (یکان (2^0)، دوگان (2^1)، چهارگان (2^2) و ... همچنین، یک دوم (2^{-1})، یک چهارم (2^{-2}) و ...)

$$\ldots \quad 2^3 \quad 2^2 \quad 2^1 \quad 2^0 \quad 2^{-1} \quad 2^{-2} \quad \ldots.$$

$$(1 \quad 0 \quad 1 \quad 1\,.\,0 \quad 1\,)_2$$

$$= 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2}$$

$$= 8 + 0 + 2 + 1 + 0 + 0.25$$

$$= 11.25$$

سیستم اعداد دودویی (Binary)

Dec	2^3	2^2	2^1	2^0	Binary
0				0	0
1				1	1
2			1	0	10
3			1	1	11
4		1	0	0	100
5		1	0	1	101
6		1	1	0	110
7		1	1	1	111
8	1	0	0	0	1000

با n بیت داده می توان 2^n عدد مختلف را نمایش داد. (از 0 تا $2^n - 1$)

تبدیل از مبنای ده به مبنای دو

قسمت صحیح: تقسیمات متوالی

قسمت اعشاری: ضربهای متوالی

$(325.43)_{10} \rightarrow (101000101.01101\ldots)_2$

325 ÷ 2	162	1
162 ÷ 2	81	0
81 ÷ 2	40	1
40 ÷ 2	20	0
20 ÷ 2	10	0
10 ÷ 2	5	0
5 ÷ 2	2	1
2 ÷ 2	1	0

0.43 * 2 = 0.86

0.86 * 2 = 1.72

0.72 * 2 = 1.44

0.44 * 2 = 0.88

0.88 * 2 = 1.76

…

تبدیل از مبنای ده به مبنای دو

روش دوم تبدیل قسمت صحیح اعداد دهدهی به دودویی استفاده از روش کاهش متوالی توان های دو

توان های دو :

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow 32 \rightarrow 64 \rightarrow 128 \rightarrow 256 \rightarrow 512 \rightarrow 1024 \rightarrow \ldots$

$25 = 1\ 1\ 0\ 0\ 1$

16 8 1

$(1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0)_{21} = 0 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times 4 + 1 \times 8 + 0 \times 16 + 1 \times 32 = (46)_{10}$

$2^5\ 2^4\ 2^3\ 2^2\ 2^1\ 2^0$

نمایش اعداد در مبنای ۸ (اکتال)

- در سیستم اکتال مبنا برابر ۸ (r=8) بوده لذا ارقام آن ۰ تا ۷ می باشد.
  - وزنها توانی از ۸ می باشد (یکان (8^0)، هشتگان (8^1)، شصت و چهارگان (8^2) و ... همچنین، یک هشتم (8^{-1})، یک شصت و چهارم (8^{-2}) و ...).
  - برای تبدیل اعداد دهدهی به مبنای ۸ یا اکتال می توان از همان روش تقسیمات متوالی به ۸ و ضربهای متوالی در ۸ استفاده کرد و یا ابتدا به باینری تبدیل کرد و سپس از باینری به اکتال به راحتی (چون $8 = 2^3$) تبدیل نمود.
  - برای تبدیل عدد **باینری** به **اُکتال**، رقم ها با شروع از نقطه ی **ممیز** به گرو ههای ۳ تایی تقسیم شده و هر گروه با رقم معادل **اُکتال** آن جایگزین می گردد.
- مثال:

$27.25 \rightarrow (1\,1\,0\,0\,1.01)_2$

$0\,1\,1\,0\,0\,1.010 \rightarrow (31.2)_8$

$(275.24)_8 \rightarrow (010111101.010100)_2$

صفرهای بی ارزش

Razi University

نمایش اعداد در مبنای ۱۶ (هگزادسیمال)

- در سیستم هگزادسیمال مبنا برابر ۱۶ (**r=16**) بوده لذا ارقام آن ۰ تا ۱۵ (۰ تا ۹ و **A** تا **F** (A=10,B=11,C=12,D=13,E=14,F=15)) می باشد.
  - وزنها توانی از ۱۶ می باشد (یکان (16^0)، شانزدهگان (16^1)، دویست وپنجاه وشش گان (16^2) و ... همچنین، یک شانزدهم (16^{-1})، یک دویست وپنجاه وششم(16^{-2} و ...).
  - برای تبدیل اعداد دهدهی به مبنای ۱۶ یا اکتال می توان از همان روش تقسیمات متوالی به ۱۶ و ضربهای متوالی در ۱۶ استفاده کرد و یا ابتدا به باینری تبدیل کرد و سپس از باینری به اکتال به راحتی (چون $16 = 2^4$) تبدیل نمود.
  - برای تبدیل عدد **باینری** به **هگزادسیمال**، رقم ها با شروع از نقطه ی **ممیز** به گروههای ۴ تایی تقسیم شده و هر گروه با رقم معادل **هگزادسیمال** آن جایگزین می گردد.
  - مثال:

$27.25 \rightarrow (11001.01)_2$

$00011001.0100 \rightarrow (19.4)_{16}$

$(7D.5)_{16} \rightarrow (01111101.0101)_2$

صفرهای بی ارزش

Razi University

نمایش اعداد در مبناهای مختلف

مقدار دهدهی، باینری، اُکتال و هگزادسیمال اعداد صفر تا پانزده:

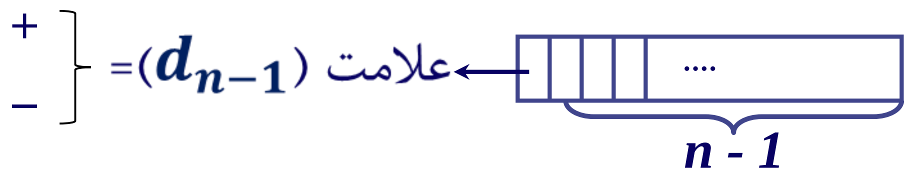
دهدهی	باینری	اکتال	هگزادسیمال
0	0000	0	0
1	0001	1	1
2	0010	2	2
3	0011	3	3
4	0100	4	4
5	0101	5	5
6	0110	6	6
7	0111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F

نمایش اعداد علامت دار

- برای نمایش اعداد علامت دار می توان از یکی از شیوه های نمایش زیر استفاده کرد (فرض کنید N یک عدد n رقمی در مبنی r داشته باشد):

$$(N)_r = (d_{n-1} \ldots d_1 d_0)_r$$

۱– سیستم علامت مقدار



۲ – سیستم مکمل مبنای کاهش یافته ((r-1)'s Complement)

$$(r-1)'s\ Complement(N)_r = (\text{بزرگترین عدد } n \text{ رقمی مبنای } r) - N$$

$$= r^n - 1 - N$$

$$= (r-1-d_{n-1})(r-1-d_{n-2}) \ldots (r-1-d_1)(r-1-d_0)$$

۳ – سیستم مکمل مبنا (r's Complement)

$$r's\ Complement(N)_r = \left(\text{مکمل مبنای کاهش یافته}\right) + 1$$

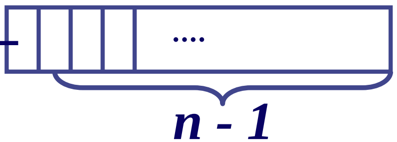
$$= r^n - N$$

نمایش اعداد علامت دار مبنای ۲

- فرض کنید N یک عدد n بیتی در مبنای ۲ باشد $((N)_2 = (d_{n-1} \dots d_1 d_0)_2)$:

۱– سیستم علامت مقدار

$$\text{علامت} = (d_{n-1}) \begin{cases} 1: + \\ 0: - \end{cases}$$



+58 =(0111010)$_2$ -58 =(1111010)$_2$

۲ – سیستم مکمل یک (1's Complement)

+58 =(0111010)$_2$ -58 =(1000101)$_2$

۳ – سیستم مکمل ۲ (2's Complement) $(-B = \overline{B} + 1)$:

+58 =(0111010)$_2$ -58 =(1000110)$_2$

- در سیستم مکمل ۲ هنگام تفریق می توان عدد مفروق منه را به عنوان یک عدد منفی دید و بجای آن مکمل ۲ آن را محاسبه و با مفروق جمع کنیم. البته باید از رقم نقلی طبقه آخر صرفه نظر کنیم:

258 – 194 = 258 + (999 – 194) + 1 = $\cancel{1}$064 -1000= 064

نمایش اعداد علامت دار مبنای ۲

مراحل نمایش اعداد در نمایش مکمل ۲ :

۱– عدد بدون علامت به صورت باینری نوشته شود

$(49)_{10} = (1\,1\,0\,0\,0\,1)_2$

۲ – قالب ریزی عدد:

یک صفر به سمت چپ اضافه کنید،

0 1 1 0 0 0 1

- اگر عدد مثبت بود کار تمام است،
- اما اگر عدد منفی است لازم است مکمل دو شود.
  - تمام بیتها معکوس شده و سپس حاصل با یک جمع گردد.

0 1 1 0 0 0 1

نمایش اعداد علامت دار مبنای ۲

محاسبه مقدار عدد در مکمل۲:

$1\,0\,0\,1\,0\,1\,1 = +2^0 + 2^1 + 2^3 - 2^6 = -53$

روش های مختلف نمایش اعداد علامت دار:

سیستم علامت مقدار	سیستم مکمل یک	سیستم مکمل دو
000 = +0	000 = +0	000 = +0
001 = +1	001 = +1	001 = +1
010 = +2	010 = +2	010 = +2
011 = +3	011 = +3	011 = +3
100 = -0	100 = -3	100 = -4
101 = -1	101 = -2	101 = -3
110 = -2	110 = -1	110 = -2
111 = -3	111 = -0	111 = -1

جمع و تفریق اعداد علامت مقدار

(+14)	0 0 0 1 1 1 0	(+14)	0 0 0 1 1 1 0
+(+ 7)	+ 0 0 0 0 1 1 1	-(+ 7)	- 0 0 0 0 1 1 1
+ 21	0 0 1 0 1 0 1	+ 7	0 0 0 0 1 1 1
(+49)	0 1 1 0 0 0 1	(-54)	1 1 1 0 1 1 0
+(+37)	+ 0 1 0 0 1 0 1	+(-33)	+ 1 1 0 0 0 0 1
+ 86	1 0 1 0 1 1 0	+ 21	1 1 0 1 0 1 1 1

– در سیستم علامت مقدار در صورتیکه دو عدد بزرگ مثبت یا دو عدد بزرگ منفی باهم جمع زده شود حاصل در n بیت جا نشود آنگاه ممکن است بیت علامت (به اشتباه) تغییر کند یا یک رقم نقلی از بیت علامت خارج گردد که در این صورت خطای سرریز رخ خواهد داد.

– در سیستم بدون علامت خطای سرریز همان Carryاست.

– اگر در جمع خطای سرریز رخ داد، باید جمع را در قالب بزرگتری انجام دهیم.

جمع و تفریق اعداد مکمل ۲

$$\begin{array}{r} (+14) \\ +(+\ 7) \\ \hline +21 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0\,0\,0\,1\,1\,1\,0 \\ +\ 0\,0\,0\,0\,1\,1\,1 \\ \hline 0\,0\,1\,0\,1\,0\,1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} (+14) \\ -(+\ 7) \\ \hline +7 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} (+14) \\ +(-\ 7) \\ \hline +7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0\,0\,0\,1\,1\,1\,0 \\ +\ 1\,1\,1\,1\,0\,0\,1 \\ \hline \cancel{1}\ 0\,0\,0\,0\,1\,1\,1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (+49) \\ +(+37) \\ \hline +86 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0\,1\,1\,0\,0\,0\,1 \\ +\ 0\,1\,0\,0\,1\,0\,1 \\ \hline 1\,0\,1\,0\,1\,1\,0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} (-54) \\ +(-33) \\ \hline +21 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\,0\,0\,1\,0\,1\,0 \\ +\ 1\,0\,1\,1\,1\,1\,1 \\ \hline 1\ \ 0\,1\,0\,1\,0\,0\,1 \end{array}$$

- در سیستم مکمل ۲ از رقم نقلی باید صرفه نظر کرد تا نتیجه جمع درست باشد.
- برای تشخیص سرریز باید به رقم نقلی طبقه آخر (رقم آخر) نگاه کرد، اگر رقم نقلی ورودی به این طبقه با رقم نقلی خارج شده از آن یکسان نباشد خطای سرریز روی داده است.
- اگر در جمع خطای سرریز رخ داد، باید جمع را در قالب بزرگتری انجام دهیم.

Razi University

ضرب اعداد باینری :

ضرب به روش معمولی :

$$
\begin{array}{r}
1110 \\
\times \quad 0101 \\
\hline
1110 \\
0000 \\
1110 \\
0000 \\
\hline
1000110
\end{array}
$$

ضرب به روش جمع های متوالی :

$$
\begin{array}{r}
1110 \\
1110 \\
+ \quad 1110 \\
1110 \\
1110 \\
\hline
1000110
\end{array}
$$

نمایش اعداد غیر صحیح (اعشاری)

0 . 257

.	0	1	0	1	1

اعشاری < 1

25

1	1	0	0	1	.

صحیح >= 1

$$43.85 \rightarrow \underbrace{0.4385}_{} * 10^{2}$$

نما

$$0 < \text{مانتیس} < 1$$

علامت نما	نما	مانتیس

$$1\,0\,1\,0\,1\,1\,.\,1\,1\,0\,1 = 0\,.\,\underbrace{1\,0\,1\,0\,1\,1\,1\,1\,0\,1}_{} * 2^{+6}$$

$$0.5 < \text{مانتیس} < 1$$

سایر روشهای و کدینگ های متعارف

- کدینگ BCD (Binary Coded Decimal) جهت نمایش اعداد دهدهی بصورت باینری
- کدینگ افزونه ۳ یا EX-3 (Excess 3)
  - در مورد کاراکتر ها، از کد اسکی آنها استفاده می کنیم.

	B C D
0	0 0 0 0
1	0 0 0 1
2	0 0 1 0
3	0 0 1 1
4	0 1 0 0
5	0 1 0 1
6	0 1 1 0
7	0 1 1 1
8	1 0 0 0
9	1 0 0 1

(دارای وزن)

	ex - 3
0	0 0 1 1
1	0 1 0 0
2	0 1 0 1
3	0 1 1 0
4	0 1 1 1
5	1 0 0 0
6	1 0 0 1
7	1 0 1 0
8	1 0 1 1
9	1 1 0 0

(خود مکمل)

	2 4 2 1
0	0 0 0 0
1	0 0 0 1
2	1 0 0 0
3	0 0 1 1
4	0 1 0 0
5	1 0 1 1
6	1 1 0 0
7	0 1 1 1
8	1 1 1 0
9	1 1 1 1

یک کد وزنی و خود مکمل

کد گری (Gray Code)

در این کد، هر کدام از کد ها تنها در یک بیت با کد قبلی متفاوت است و این روند چرخشی است؛یعنی آخرین کد و اولین کد نیز تنها در ۱ بیت متفاوتند.

x	y	z
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

Gray code

BCD code

x	y	z
0	0	0
0	0	1
0	1	1
0	1	0
1	1	0
1	1	1
1	0	1
1	0	0